32. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

32.1. Математическая модель транспортной задачи

Однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Известны c_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ — стоимости перевозки единицы груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех поставщиков вывозятся полностью, запросы всех потребителей удовлетворяются полностью и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны.

Исходные данные транспортной задачи записываются в таблице вида

$a_i \backslash b_j$	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

Переменными (неизвестными) транспортной задачи являются x_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ — объемы перевозок от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Эти переменные могут быть записаны в виде матрицы перевозок $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$.

Математическая модель транспортной задачи в общем случае имеет вид

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{32.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{32.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{32.3}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{32.4}$$

Целевая функция задачи (32.1) выражает требование обеспечить минимум суммарных затрат на перевозку всех грузов. Первая группа из m уравнений (32.2) описывает тот факт, что запасы всех m поставщиков вывозятся полностью. Вторая группа из n уравнений (32.3) выражает требование полностью удовлетворить запросы всех n потребителей. Неравенства (32.4) являются условиями неотрицательности всех переменных задачи.

Таким образом, математическая формулировка транспортной задачи состоит в следующем: найти переменные задачи

$$X = (x_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

удовлетворяющие системе ограничений (32.2), (32.3), условиям неотрицательности (32.4) и обеспечивающие минимум целевой функции (32.1).

В рассмотренной модели транспортной задачи предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{32.5}$$

Такая задача называется *задачей с правильным балансом*, а ее модель — *закрытой*. Если же это равенство не выполняется, то задача называется *задачей с неправильным балансом*, а ее модель — *открытой*.

Для того чтобы транспортная задача линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно, чтобы суммарные запасы поставщиков равнялись суммарным запросам потребителей (см. равенство (32.5)), т.е. задача должна быть с правильным балансом.

32.1. Составить математическую модель транспортной задачи, исходные данные которой таковы:

$a_i \backslash b_j$	50	70	80
90	9	5	3
110	4	6	8

Р е ш е н и е. Введем переменные задачи (матрицу перевозок)

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу стоимостей

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Целевая функция задачи равна сумме произведений всех соответствующих элементов матриц C и X:

$$Z(X) = 9x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 8x_{23}.$$

Данная функция, определяющая суммарные затраты на все перевозки, должна достигать минимального значения.

Составим систему ограничений задачи. Сумма всех перевозок, стоящих в первой строке матрицы X, должна равняться запасам первого поставщика, а сумма перевозок во второй строке матрицы X — запасам второго поставщика:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 110.$$

Это означает, что запасы поставщиков вывозятся полностью.

Суммы перевозок, стоящих в каждом столбце матрицы X, должны быть равны запросам соответствующих потребителей:

$$x_{11} + x_{21} = 50,$$

$$x_{12} + x_{22} = 70,$$

$$x_{13} + x_{23} = 80.$$

Это означает, что запросы потребителей удовлетворяются полностью.

Необходимо также учитывать, что перевозки не могут быть отрицательными: $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Ответ: математическая модель задачи формулируется следующим образом: найти переменные задачи, обеспечивающие минимум функции

$$Z(X) = 9x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 8x_{23}$$

и удовлетворяющие системе ограничений

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 110, \\ x_{11} + x_{21} = 50, \\ x_{12} + x_{22} = 70, \\ x_{13} + x_{23} = 80 \end{cases}$$

и условиям неотрицательности

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

32.2. Опорное решение транспортной задачи

Опорным решением транспортной задачи называется любое допустимое решение, для которого векторы условий, соответствующие положительным координатам, линейно независимы.

Ввиду того что ранг системы векторов условий транспортной задачи равен $N = m + n - 1$, опорное решение не может иметь отличных от нуля координат больше, чем N.

Для проверки линейной независимости векторов условий, соответствующих координатам допустимого решения, используют циклы.

Циклом называется такая последовательность клеток таблицы транспортной задачи (i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), $\ldots$, (i_k, j_1), в которой две и только две соседние клетки расположены в одной строке или столбце, причем первая и последняя также находятся в одной строке или столбце.

Система векторов условий транспортной задачи линейно независима тогда и только тогда, когда из соответствующих им клеток таблицы нельзя образовать ни одного цикла. Следовательно, допустимое решение транспортной задачи $X = (x_{ij})$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$ является опорным только в том случае, когда из занятых им клеток таблицы нельзя образовать ни одного цикла.

Метод вычеркивания. Для проверки возможности образования цикла используется так называемый метод вычеркивания, который состоит в следующем.

Если в строке или столбце таблицы одна занятая клетка, то она не может входить в какой-либо цикл, так как цикл имеет две и только две клетки в каждой строке или в столбце. Следовательно, можно вычеркнуть все строки таблицы, содержащие по одной занятой клетке, затем вычеркнуть все столбцы, содержащие по одной занятой клетке, далее вернуться к строкам и продолжить вычеркивание строк и столбцов. Если в результате вычеркиваний все строки и столбцы будут вычеркнуты, значит, из занятых клеток таблицы нельзя выделить часть, образующую цикл, и система соответствующих векторов условий является линейно независимой, а решение — опорным. Если же после вычеркиваний останется часть клеток, то эти клетки образуют цикл, система соответствующих векторов условий линейно зависима, а решение не является опорным.

Метод северо-западного угла. Согласно данному методу запасы очередного поставщика используются для обеспечения запросов очередных потребителей до тех пор, пока не будут исчерпаны полностью, после чего используются запасы следующего по номеру поставщика.

Заполнение таблицы транспортной задачи начинается с левого верхнего угла и состоит из ряда однотипных шагов. На каждом шаге, исходя из запасов очередного поставщика и запросов очередного потребителя, заполняется только одна клетка и соответственно исключается из рассмотрения один поставщик или потребитель. При этом нулевые перевозки принято заносить в таблицу только в том случае, когда они попадают в клетку (i, j), подлежащую заполнению, т.е. в таблицу заносятся только базисные нули (0^*), остальные клетки с нулевыми перевозками остаются пустыми.

Во избежание ошибок после построения начального опорного решения необходимо проверить, что число занятых клеток равно $m + n - 1$ и векторы условий, соответствующие этим клеткам, линейно независимы.

Необходимо иметь в виду, что метод северо-западного угла не учитывает стоимость перевозок, поэтому опорное решение, построенное по данному методу, может быть далеким от оптимального.

32.4. Составить начальное опорное решение, используя метод северо-западного угла, для транспортной задачи, исходные данные которой таковы:

$a_i \backslash b_j$	250	300	200	200
200	9	8	3	1
350	7	10	6	4
400	2	3	8	12

Решение. Распределяем запасы первого поставщика. Так как его запасы $a_1 = 200$ меньше запросов первого потребителя $b_1 = 250$, то в клетку (1, 1) записываем перевозку $x_{11} = 200$ и исключаем из рассмотрения первого поставщика (табл. 32.1). Определяем оставшиеся неудовлетворенными запросы первого потребителя $b_1' = b_1 - a_1 = 250 - 200 = 50$.

Распределяем запасы второго поставщика. Так как его запасы $a_2 = 350$ больше оставшихся неудовлетворенными запросов первого потребителя $b_1' = 50$, то в клетку (2, 1) записываем перевозку $x_{21} = 50$ и исключаем из рассмотрения первого потребителя. Определяем оставшиеся запасы второго поставщика $a_2' = a_2 - b_1' = 350 - 50 = 300$. Так как $a_2' = b_2 = 300$, то в клетку (2, 2) записываем $x_{22} = 300$ и исключаем по своему усмотрению либо второго поставщика, либо второго потребителя. Пусть исключили второго поставщика. Вычисляем оставшиеся неудовлетворенными запросы второго потребителя $b_2' = b_2 - a_2' = 300 - 300 = 0$.

Распределяем запасы третьего поставщика. Так как $a_3 > b_2'$ $(400 > 0)$, то в клетку (3, 2) записываем $x_{32} = 0$ и исключаем второго потребителя. Запасы третьего поставщика не изменились $a_3' = a_3 - b_2' = 400 - 0 = 400$. Сравниваем a_3' и b_3 $(400 > 200)$, в клетку (3, 3) записываем $x_{33} = 200$, исключаем третьего потребителя и вычисляем $a_3'' = a_3' - b_3 = 400 - 200 = 200$. Так как $a_3'' = b_4$, то в клетку (3, 4) записываем $x_{34} = 200$. Ввиду того что задача с правильным балансом, запасы всех поставщиков исчерпаны и запросы всех потребителей удовлетворены полностью.

Результаты построения опорного решения приведены в табл. 32.1.

Таблица 32.1

$a_i \backslash b_j$	250	300	200	200
200	200 (9)	(8)	(3)	(1)
350	50 (7)	300 (10)	(6)	(4)
400	(2)	0 (3)	200 (8)	200 (12)

Проверяем правильность построения опорного решения. Число занятых клеток должно быть равно $N = m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$. В табл. 32.1 занято 6 клеток.

Применяя метод вычеркивания, убеждаемся, что найденное решение является «вычеркиваемым»:

$$X = \begin{pmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 200 & 200 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, векторы условий, соответствующие занятым клеткам, линейно независимы и построенное решение действительно является опорным.

Метод минимальной стоимости. Данный метод позволяет построить опорное решение, которое достаточно близко к оптимальному, так как использует матрицу стоимостей транспортной задачи $C = (c_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Как и метод северо-западного угла, он состоит из ряда однотипных шагов, на каждом из которых заполняется только одна клетка таблицы, соответствующая минимальной стоимости $\min\limits_{i,j}\{c_{ij}\}$, и исключается из рассмотрения только одна строка (поставщик) или один столбец (потребитель). Очередную клетку, соответствующую $\min\limits_{i,j}\{c_{ij}\}$, заполняют по тем же правилам, что и в методе северо-западного угла. Поставщик исключается из рассмотрения, если его запасы заканчиваются. Потребитель исключается из рассмотрения, если его запросы удовлетворены полностью. На каждом шаге исключается либо один поставщик, либо один потребитель. При этом если поставщик еще не исключен, но его запасы равны нулю, то на том шаге, когда от него требуется поставить груз, в соответствующую клетку таблицы заносится базисный нуль и лишь затем поставщик исключается из рассмотрения. Аналогично поступают с потребителем.

32.5. Используя метод минимальной стоимости, построить начальное опорное решение транспортной задачи, исходные данные которой таковы:

a_i \ b_j	80	120	160	120
120	1	3	4	2
160	4	5	8	3
200	2	3	6	7

Р е ш е н и е. Запишем отдельно матрицу стоимостей для того, чтобы удобнее было выбирать минимальные стоимости, вычеркивать строки и столбцы:

$$C = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 6 \\ 5 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 4 & 6 & 3 \end{array} & \end{array}$$

Среди элементов матрицы стоимостей выбираем наименьшую стоимость $c_{11} = 1$, отмечаем ее кружочком. Это стоимость перевозки груза от первого поставщика первому потребителю. В соответствующую клетку (1, 1) записываем максимально возможную перевозку $x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{120, 80\} = 80$ (табл. 32.2). Запасы первого поставщика уменьшаем на 80, $a_1' = a_1 - b_1 = 120 - 80 = 40$. Исключаем из рассмотрения первого потребителя, так как его запросы удовлетворены. В матрице C вычеркиваем первый столбец.

Таблица 32.2

a_i \ b_j	80	120	160	120
120	1 80	3	4	2 40
160	4	5	8 80	3 80
200	2	3 120	6 80	7

В оставшейся части матрицы C наименьшей является стоимость $c_{14} = 2$. Максимально возможная перевозка, которую можно осуществить от первого поставщика четвертому потребителю, равна $x_{14} = \min\{a_1', b_4\} = \min\{40, 120\} = 40$. В соответствующую клетку таблицы записываем перевозку $x_{14} = 40$. Запасы первого поставщика исчерпаны, исключаем его из рассмотрения. В матрице C вычеркиваем первую строку. Запросы четвертого потребителя уменьшаем на 40, $b_4' = b_4 - a_1' = 120 - 40 = 80$.

В оставшейся части матрицы C минимальная стоимость $c_{24} = c_{32} = 3$. Заполняем одну из двух клеток таблицы (2, 4) или (3, 2). Пусть в клетку (2, 4) запишем $x_{24} = \min\{a_2, b_4'\} = \min\{160, 80\} = 80$. Запросы четвертого потребителя удовлетворены полностью, исключаем его из рассмотрения, вычеркиваем четвертый столбец в матрице C. Уменьшаем запасы второго поставщика $a_2' = a_2 - b_4' = = 160 - 80 = 80$.

В оставшейся части матрицы C минимальная стоимость $\min\{c_{ij}\} = c_{32} = 3$. Запишем в клетку таблицы (3, 2) перевозку $x_{32} = \min\{a_3, b_2\} = \min\{200, 120\} = 120$. Исключаем из рассмотрения второго потребителя, а из матрицы C второй столбец. Вычисляем $a_3' = a_3 - b_2 = 200 - 120 = 80$.

В оставшейся части матрицы C наименьшая стоимость $\min\{c_{ij}\} = c_{33} = 6$. Запишем в клетку таблицы (3, 3) перевозку $x_{33} = \min\{a_3', b_3\} = \min\{80, 160\} = 80$. Исключаем из рассмотрения третьего поставщика, а из матрицы C третью строку. Определяем $b_3' = b_3 - a_3' = 160 - 80 = 80$.

В матрице C остался единственный элемент $c_{23} = 8$. Записываем в клетку таблицы (2, 3) перевозку $x_{23} = 80$.

Проверяем правильность построения опорного решения. Число занятых клеток таблицы равно $N = m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ (см. табл. 32.2). Применяя метод вычеркивания, проверяем линейную независимость векторов условий, соответствующих положительным координатам решения. Порядок вычеркивания показан на матрице X:

$$X = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} 80 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 80 & 80 \\ 0 & 120 & 80 & 0 \end{array} \right) \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \\ 4 \\ \\ \end{array}$$

Решение является «вычеркиваемым» и, следовательно, опорным.

Переход от одного опорного решения к другому. В транспортной задаче переход от одного опорного решения к другому осуществляется с помощью цикла. Для некоторой свободной клетки таблицы строится цикл, содержащий часть клеток, занятых опорным решением. По этому циклу перераспределяются объемы перевозок (осуществляется сдвиг по циклу). Перевозка «загружается» в выбранную свободную клетку и освобождается одна из занятых клеток, получается новое опорное решение.

Если таблица транспортной задачи содержит опорное решение, то для любой свободной клетки таблицы существует е д и н с т в е н н ы й цикл, содержащий эту клетку и часть клеток, занятых опорным решением.

Для удобства вычислений вершины циклов нумеруют и отмечают нечетные знаком «+», а четные знаком «−». Такой цикл называется *означенным* (рис. 32.1).

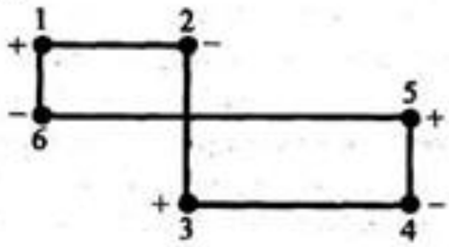

Рис. 32.1

Сдвигом по циклу на величину θ называется увеличение объемов перевозок во всех нечетных клетках цикла, отмеченных знаком «+», и уменьшение объемов перевозок на ту же величину θ во всех четных клетках, отмеченных знаком «−».

32.3. Метод потенциалов

Широко распространенным методом решения транспортных задач является метод потенциалов.

Если допустимое решение $X = (x_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ транспортной задачи является оптимальным, то существуют потенциалы (числа) поставщиков u_i, $i = 1, 2, \dots, m$ и потребителей v_j, $j = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{при} \quad x_{ij} > 0, \tag{32.6}$$

$$u_i + v_j \leqslant c_{ij} \quad \text{при} \quad x_{ij} = 0. \tag{32.7}$$

Группа равенств (32.6) используется как система уравнений для нахождения потенциалов. Данная система уравнений имеет $m + n$ неизвестных u_i, $i = 1, 2, \dots, m$ и v_j, $j = 1, 2, \dots, n$. Число уравнений системы, как и число отличных от нуля координат невырожденного опорного решения, равно $m + n - 1$. Так как число неизвестных системы на единицу больше числа уравнений, то одной из них можно задать значение произвольно, а остальные найти из системы.

Группа неравенств (32.7) используется для проверки оптимальности опорного решения. Эти неравенства удобнее представить в следующем виде:

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \leqslant 0 \text{ при } x_{ij} = 0. \tag{32.8}$$

Числа Δ_{ij} называются *оценками* для свободных клеток таблицы (векторов условий) транспортной задачи.

Опорное решение является о п т и м а л ь н ы м, если для всех векторов условий (клеток таблицы) оценки неположительные.

Оценки для свободных клеток транспортной таблицы используются при улучшении опорного решения. Для этого находят клетку (l, k) таблицы, соответствующую $\max\{\Delta_{ij}\} = \Delta_{lk}$. Если $\Delta_{lk} \leqslant 0$, то решение оптимальное. Если же $\Delta_{lk} > 0$, то для соответствующей клетки (l, k) строят цикл и улучшают решение, перераспределяя груз $\theta = \min\limits_{\leftarrow\rightarrow}\{x_{ij}\}$ по этому циклу.

Особенности решения транспортных задач с неправильным балансом:

1. Если суммарные запасы поставщиков превосходят суммарные запросы потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

то необходимо ввести фиктивного $(n + 1)$-го потребителя с запросами $b_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i - \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, равными разности суммарных запасов поставщиков и запросов потребителей, и нулевыми стоимостями перевозок единиц груза $c_{i(n+1)} = 0 \quad \forall i$.

2. Если суммарные запросы потребителей превосходят суммарные запасы поставщиков, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

то необходимо ввести фиктивного $(m + 1)$-го поставщика с запасами $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, равными разности суммарных запросов потребителей и запасов поставщиков, и нулевыми стоимостями перевозок единиц груза $c_{(m+1)j} = 0 \quad \forall j$.

3. При составлении начального опорного решения в последнюю очередь следует распределять запасы фиктивного поставщика и удовлетворять запросы фиктивного потребителя, несмотря на то, что им соответствует наименьшая стоимость перевозок, равная нулю.

Алгоритм решения транспортных задач методом потенциалов:

1. Проверить выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости задачи. Если задача имеет неправильный баланс, то вводится фиктивный поставщик или потребитель с недостающими запасами или запросами и нулевыми стоимостями перевозок.

2. Построить начальное опорное решение (методом минимальной стоимости или каким-либо другим методом), проверить правильность его построения по количеству занятых клеток (их должно быть $m + n - 1$) и убедиться в линейной независимости векторов условий (используя метод вычеркивания).

3. Построить систему потенциалов, соответствующих опорному решению. Для этого решают систему уравнений

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{при } x_{ij} > 0,$$

которая имеет бесконечное множество решений. Для нахождения частного решения системы одному из потенциалов (обычно тому, которому соответствует большее число занятых клеток) задают произвольно некоторое значение (чаще нуль). Остальные потенциалы однозначно определяются по формулам

$$u_i = c_{ij} - v_j \quad \text{при } x_{ij} > 0, \tag{32.9}$$

если известен потенциал v_j, и

$$v_j = c_{ij} - u_i \quad \text{при } x_{ij} > 0, \tag{32.10}$$

если известен потенциал u_i.

4. Проверить выполнение условия оптимальности для свободных клеток таблицы. Для этого вычисляют оценки для всех свободных клеток по формулам

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

и те из них, которые больше нуля, записывают в левые нижние углы клеток. Если для всех свободных клеток $\Delta_{ij} \leqslant 0$, то вычисляют значение целевой функции и решение задачи заканчивается, так как полученное решение является оптимальным. Если же имеется хотя бы одна клетка с положительной оценкой, опорное решение не является оптимальным.

5. Перейти к новому опорному решению, на котором значение целевой функции будет меньше. Для этого находят клетку таблицы задачи, которой соответствует наибольшая положительная оценка

$$\max\{\Delta_{ij}\} = \Delta_{lk}.$$

Строят цикл, включающий в свой состав данную клетку и часть клеток, занятых опорным решением. В клетках цикла расставляют поочередно знаки «+» и «−», начиная с «+» в клетке с наибольшей положительной оценкой. Осуществляют сдвиг (перераспределение груза) по циклу на величину $\theta = \min\limits_{«-»}\{x_{ij}\}$. Клетка со знаком «−», в которой достигается $\min\limits_{«-»}\{x_{ij}\}$, остается пустой. Если минимум достигается в нескольких клетках, то одна из них остается пустой, а в остальных проставляют базисные нули, чтобы число занятых клеток оставалось равным $m + n - 1$.

Далее перейти к пункту 3 данного алгоритма.

32.10. Решить транспортную задачу, исходные данные которой таковы:

a_i \ b_j	200	200	300	400
200	4	3	2	1
300	2	3	5	6
500	6	7	9	12

Р е ш е н и е. 1. Проверяем выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости задачи. Находим суммарные запасы поставщиков и суммарные запросы потребителей:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 200 + 300 + 500 = 1000, \qquad \sum_{j=1}^{4} b_j = 200 + 200 + 300 + 400 = 1100.$$

Задача с неправильным балансом. Вводим четвертого, фиктивного поставщика с запасами $a_4 = 1100 - 1000 = 100$ и нулевыми стоимостями перевозок единиц груза (табл. 32.3).

2. Находим начальное опорное решение методом минимальной стоимости (см. табл. 32.3). Полученное решение X_1 имеет $m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$ базисных переменных. Вычисляем значение целевой функции на этом опорном решении: $Z(X_1) = 1 \cdot 200 + 2 \cdot 200 + 3 \cdot 100 + 7 \cdot 100 + 9 \cdot 300 + 12 \cdot 100 + 0 \cdot 100 = 5300.$

Таблица 32.3

a_i \ b_j	200	200	300	400
200	4	3	2	1 200
300	2 200	3 100	5	6
500	6	7 100	9 300	12 100
100	0	0	0	0 100

3. Для проверки оптимальности опорного решения необходимо найти потенциалы. По признаку оптимальности в каждой занятой опорным решением клетке таблицы транспортной задачи сумма потенциалов равна стоимости ($u_i + v_j = c_{ij}$ при $x_{ij} > 0$). Записываем систему уравнений для нахождения потенциалов и решаем ее:

$$\begin{cases} u_1 + v_4 = 1, \\ u_2 + v_1 = 2, \\ u_2 + v_2 = 3, \\ u_3 + v_2 = 7, \\ u_3 + v_3 = 9, \\ u_3 + v_4 = 12, \\ u_4 + v_4 = 0. \end{cases}$$

Система состоит из семи уравнений и имеет восемь переменных. Система неопределенная. Одному из потенциалов задаем значение произвольно: пусть $u_3 = 0$. Остальные потенциалы находятся однозначно:

$$\begin{aligned} &u_3 = 0; \\ &v_2 = 7 - u_3 = 7 - 0 = 7; \\ &v_3 = 9 - u_3 = 9 - 0 = 9; \\ &v_4 = 12 - u_3 = 12 - 0 = 12; \\ &u_1 = 1 - v_4 = 1 - 12 = -11; \\ &u_4 = 0 - v_4 = 0 - 12 = -12; \\ &u_2 = 3 - v_2 = 3 - 7 = -4; \\ &v_1 = 2 - u_2 = 2 - (-4) = 6. \end{aligned}$$

Значения потенциалов записываем в таблицу рядом с запасами или запросами соответствующих поставщиков и потребителей (табл. 32.4).

Система уравнений для нахождения потенциалов достаточно проста, обычно ее решают устно. Любой неизвестный потенциал, соответствующий занятой клетке, равен находящейся в этой клетке стоимости минус известный потенциал, соответствующий этой же клетке.

Таблица 32.4

X_1

	a_i \ b_j	$v_1 = 6$ 200	$v_2 = 7$ 200	$v_3 = 9$ 300	$v_4 = 12$ 400
$u_1 = -11$	200	4 –	3 –	2 –	1 200
$u_2 = -4$	300	2 200	– 3 100	5 0	+ 6 2
$u_3 = 0$	500	6 0	7 100 +	9 300	12 100 –
$u_4 = -12$	100	0 –	0 –	0 –	0 100

4. Проверяем опорное решение X_1 на оптимальность. С этой целью вычисляем оценки Δ_{ij} для всех незаполненных клеток таблицы (для всех занятых клеток $\Delta_{ij} = 0$):

$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = -11 + 6 - 4 = -9 < 0$; $\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = -11 + 7 - 3 = -7 < 0$;
$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = -11 + 9 - 2 = -4 < 0$; $\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = -4 + 9 - 5 = 0$;
$\Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = -4 + 12 - 6 = 2 > 0$; $\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 0 + 6 - 6 = 0$;
$\Delta_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = -12 + 6 - 0 = -6 < 0$; $\Delta_{42} = u_4 + v_2 - c_{42} = -12 + 7 - 0 = -5 < 0$;
$\Delta_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = -12 + 9 - 0 = -3 < 0$.

Положительные оценки записываем в левые нижние углы соответствующих клеток таблицы, вместо отрицательных ставим знак «–».

Начальное опорное решение не является оптимальным, так как имеется положительная оценка $\Delta_{24} = 2$.

5. Переходим к новому опорному решению. Для клетки (2, 4) с положительной оценкой строим цикл. Ставим в эту клетку знак «+», присоединяем ее к занятым клеткам и, применяя метод вычеркивания, находим цикл (2, 4), (3, 4), (3, 2), (2, 2). Цикл изображен в табл. 32.4. В угловых точках цикла расставляем поочередно знаки «+» и «–», начиная с «+» в клетке (2, 4). В клетки, отмеченные знаком «+», добавляется груз θ, а из клеток, отмеченных знаком «–», убавляется такой же по величине груз. Определяем величину груза θ, перераспределяемого по циклу. Она равна значению наименьшей из перевозок в клетках цикла, отмеченных знаком «–»: $\theta = \min\limits_{«-»}\{100, 100\} = 100$. Осуществляем сдвиг по циклу на величину $\theta = 100$. Получаем второе опорное решение X_2 (табл. 32.5).

Таблица 32.5

X_2		$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 5$	$v_4 = 6$
	$a_i \backslash b_j$	200	200	300	400
$u_1 = -5$	200	4 –	3 –	2 –	1 200
$u_2 = 0$	300	2 200	3 0	5 $\boxed{0}$	6 100
$u_3 = 4$	500	6 $\boxed{0}$	7 200	9 300	12 –
$u_4 = -6$	100	0 –	0 –	0 –	0 100

Находим для этого решения потенциалы (они приведены в табл. 32.5). Вычисляем оценки:

$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = -5 + 2 - 4 = -7 < 0$; $\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = -5 + 3 - 3 = -5 < 0$;

$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = -5 + 5 - 2 = -2 < 0$; $\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 0 + 5 - 5 = 0$;

$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 4 + 2 - 6 = 0$; $\Delta_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = 4 + 6 - 12 = -2 < 0$;

$\Delta_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = -6 + 2 - 0 = -4 < 0$; $\Delta_{42} = u_4 + v_2 - c_{42} = -6 + 3 - 0 = -3 < 0$;

$\Delta_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = -6 + 5 - 0 = -1 < 0$.

Все оценки неположительные. Следовательно, решение является оптимальным. Вычисляем значение целевой функции на этом решении:

$$Z(X_2) = 1 \cdot 200 + 2 \cdot 200 + 6 \cdot 100 + 7 \cdot 200 + 9 \cdot 300 + 0 \cdot 100 = 5200.$$

Ответ: $\min Z(X) = 5200$ при $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 200 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 200 & 300 & 0 \end{pmatrix}$.

Решить транспортные задачи методом потенциалов:

32.11.

$a_i \backslash b_j$	11	7	8	4
9	2	5	8	1
16	8	3	9	2
5	7	4	6	3

32.12.

$a_i \backslash b_j$	10	10	5	8	7
7	4	6	8	3	2
13	5	3	4	6	4
20	3	2	5	7	5